令和6年度　入学試験問題

数　　　学

10

(前期日程・私費外国人留学生選抜)

「解答はじめ」の合図があるまでは問題冊子を開いてはいけません。

注 意 事 項

1. 問題冊子は1ページから5ページまでの綴りでできています。「解答はじめ」の合図の後，ページの落丁，乱丁あるいは印刷の不鮮明なものがあれば，手をあげて試験監督者に申し出てください。
2. 問題は4問あり，それぞれに解答用紙が1枚（表裏計2ページ）ずつ，合計4枚（8ページ）あります。4枚の解答用紙のすべての表に受験番号を必ず記入してください。解答用紙の裏には受験番号を記入する必要はありません。
3. 解答は該当する解答用紙に記入してください。解答用紙の表と裏では上下が逆になっています。記入の際には注意してください。
4. 問題冊子の空白のページや余白は，下書きに使用してください。
5. 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

$\boxed{1}$

自然数 n は定数とする。関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^n},$$
$$g(x) = \frac{5}{12}x^4 + \left(\frac{1}{3}e^3 - 2\right)x - \log x + \int_e^x \left(f(t) + xt^2\right)dt$$

について，次に答えよ。ただし，対数は自然対数を表し，e は自然対数の底とする。

(i) 関数 $h(x) = 3x^3 - 2 - \dfrac{1}{x}$ は $x > 0$ で増加することを示せ。また，$x > 0$ の範囲で方程式 $h(x) = 0$ を解け。

(ii) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ。ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい。

(iii) $e^{(\pi^n)}$ と $\pi^{(e^n)}$ の大小関係を調べよ。必要であれば，$e < \pi$ を用いてよい。

(iv) $g(x)$ が最小になるときの x の値を求めよ。

(v) $g(x)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

$a>0$，$b>0$，$0<t<1$ とする。曲線

$$C\colon \frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

は 3 直線

$$l_1 : y=x, \qquad l_2 : y=-x+2, \qquad l_3 : y=-t$$

に接しているとし，C と l_1 の接点を P とする。次に答えよ。

(i) a，b を t を用いて表せ。

(ii) 点 P の座標を t を用いて表せ。

(iii) l_2 と l_3 の交点を Q とする。直線 PQ が点 $(1,\ 0)$ を通るとき，t の値を求めよ。

(iv) 曲線 C の媒介変数表示を $x=1+a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$ とし，点 P の座標を $(1+a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ と表す。t が (iii) で求めた値のとき，$\beta\ (0 \leqq \beta < 2\pi)$ を求めよ。

(v) t は (iii) で求めた値とし，曲線 C の $y \geqq 0$ の部分を C_1 とする。2 直線 l_1，l_2 と曲線 C_1 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{3}$

次に答えよ。

(i) $z = \cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ とする。z^9 と $z^3 + \overline{z}^3$ を求めよ。ただし，i は虚数単位を表し，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。

(ii) $k = 1$，2，3，4 に対して，$8\cos^3\dfrac{2k\pi}{9} - 6\cos\dfrac{2k\pi}{9} + 1$ を求めよ。

(iii) $\cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{4\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9}$ と $\cos\dfrac{2\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{8\pi}{9}$ を求めよ。

(iv) $k = 1$，2，4 に対して，$\cos\dfrac{2k\pi}{9}$ は無理数であることを示せ。

(v) $\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$（a，b，c は有理数，$a \neq 0$）の解とはならないことを示せ。

$\boxed{4}$

n は自然数とする。A と B の 2 種類の文字のみを用いて，B が連続しないように n 個並べた文字列全体の集合を X_n とする。X_n の 2 つの部分集合

$$S_n = \{x \mid x \in X_n \text{ かつ } x \text{ の最後の文字が A }\},$$
$$T_n = \{x \mid x \in X_n \text{ かつ } x \text{ の最後の文字が B }\}$$

の要素の個数をそれぞれ a_n，b_n とおく。例えば，$n = 1$ のとき，$X_1 = \{\text{A，B}\}$，$S_1 = \{\text{A}\}$，$T_1 = \{\text{B}\}$ より，$a_1 = 1$，$b_1 = 1$ である。また，$n = 2$ のとき，$X_2 = \{\text{AA，AB，BA}\}$，$S_2 = \{\text{AA，BA}\}$，$T_2 = \{\text{AB}\}$ より，$a_2 = 2$，$b_2 = 1$ である。次に答えよ。

(i) a_3，b_3，a_4，b_4 を求めよ。

(ii) a_{n+1}，b_{n+1} をそれぞれ a_n と b_n を用いて表せ。

(iii) $a_n \geqq 100$ と $b_n \geqq 100$ をともにみたす最小の n を求めよ。

(iv) 自然数 a，b と $c = a + b$ に対して，

$$L = \{d \mid d \text{ は } a，b \text{ の公約数}\}, \qquad R = \{d \mid d \text{ は } a，c \text{ の公約数}\}$$

とする。$L \subset R$ と $L \supset R$ がともに成り立つこと（つまり $L = R$）を示せ。また，すべての自然数 m に対して，a_m と b_m は互いに素であることを数学的帰納法により示せ。

(v) $r_n = \dfrac{a_n}{a_n + b_n}$ とする。ある関数 $f(x)$ により等式 $r_{m+1} = f(r_m)$ がすべての自然数 m について成立する。$f(x)$ をひとつ求めよ。また，極限値 $\displaystyle\lim_{m \to \infty} r_m$ を求めよ。